# Über Anwendungen der Variationsrechnung auf technische Eigenwertprobleme

Schaefer, Hermann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 4, 1952, S. 166-175

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Über Anwendungen der Variationsrechnung auf technische Eigenwertprobleme

Von H. Schaefer

*Summary: Approximate methods for solving eigenvalue-problems are developed and illustrated by the example of symmetrical oscillations of a circular plate in its own plane. The foundation of these studies, including the well known methods by Ritz and Grammel, is the principle of Hamilton, transformed into its canonical form. Two methods of approximation are compared with regard to their accuracy and practical applicability.*

## I. Einleitung

Über die in der technischen Dynamik auftretenden Eigenwertprobleme und ihre praktische Behandlung gibt uns das bekannte Werk von Biezeno-Grammel[1]) einen umfassenden Überblick. Unter den zahlreichen Näherungsverfahren, die von der angewandten Mathematik zur Verfügung gestellt werden[2]), sind die direkten Methoden der Variationsrechnung von überragender Bedeutung. Neben den Verfahren von Ritz und Galerkin ist besonders die Grammelsche Methode zu erwähnen, die bei Untersuchungen über Stabilität und Schwingungen von Balken, auch bei komplizierten Randbedingungen, zu erstaunlich genauen Näherungen für die Eigenwerte führt. Grammel hat auch dargelegt, wie sein Verfahren auf die Berechnung „mehrläufiger" Systeme zugeschnitten werden kann[3]), zu denen man die drehsymmetrischen Flächenträger, wie Scheiben, Platten und Schalen, zählt.

In den nachstehenden Ausführungen soll gezeigt werden, wie die mit der Variationsrechnung zusammenhängenden Näherungsmethoden, insbesondere das Grammelsche Verfahren, sich aus einem übergeordneten Variationsproblem gewinnen lassen. Es ist dies das in der Hamilton-Jacobischen Theorie der analytischen Mechanik oft benutzte kanonische Variationsproblem. Gerade bei der Untersuchung der Flächenträger hat sich gezeigt[4])[5]), daß durch Einführung der kanonischen Koordinaten die für das elastische Gebilde zu bevorzugenden Variablen herausgestellt werden, wodurch Ordnung in die Fülle der auftretenden Gleichungen gebracht wird. Darüber hinaus bietet das kanonische Variationsproblem eine große Zahl von Möglichkeiten, Näherungsverfahren zu entwickeln, die dem vorgelegten Eigenwertproblem und seinen Randbedingungen angepaßt sind.

Um die Darstellung solcher Methoden nicht zu abstrakt werden zu lassen, sollen sie an Hand eines leicht übersehbaren Beispiels dargestellt werden, an dem schon Grammel sein Verfahren erläutert hat[3]). Im übrigen sei diese Abhandlung als Ergänzung zu[6]) gedacht.

## II. Drehsymmetrische Dehnungsschwingungen einer Kreisscheibe als Beispiel eines Eigenwertproblems

### 1. *Die Grundgleichungen, das Prinzip der kleinsten Wirkung und das Eigenwertproblem*

Bei Benutzung der Polarkoordinaten $r$ und $\varphi$ sind wegen der vorausgesetzten Drehsymmetrie alle auftretenden Größen unabhängig vom Winkel $\varphi$. Die radiale Spannung $\sigma_r$ und die Spannung $\sigma_\varphi$ in Umfangsrichtung sind Hauptspannungen, die ihnen zugeordneten Dehnungen $\varepsilon_r$ und $\varepsilon_\varphi$ Hauptdehnungen. Ein Massenelement $dm = \varrho \cdot h \cdot r\, d\varphi\, dr$, wobei $\varrho$ die Dichte, $h$ die mit $r$ veränderliche Scheibendicke bedeutet, erfährt nur Verschiebungen $y(r)$ in radialer Richtung.

Der Zusammenhang der Dehnungen mit der Verschiebung lautet

$$\varepsilon_r = \frac{dy}{dr}; \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{y}{r}, \tag{1,1}$$

und die Spannungen hängen mit den Dehnungen durch das Hookesche Gesetz zusammen:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\,\varepsilon_\varphi); \qquad \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\,\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) \tag{1,2}$$

(Elastizitätsmodul $E$, Querkontraktionsziffer $\nu$).

Die Verschiebung in Abhängigkeit von der Zeit ist bei einer Eigenschwingung $y(r)\cdot\cos\omega t$. Das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Hamiltonschen Form liefert dann, nach Beseitigung der Zeit, in der bekannten Weise für die Amplitude $y(r)$ der Eigenschwingung das Variationsproblem: „Scheitelwert der potentiellen Energie minus Scheitelwert der kinetischen Energie ist stationär bezüglich einer Variation von $y(r)$".

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}(\sigma_r\cdot\varepsilon_r + \sigma_\varphi\cdot\varepsilon_\varphi)h\cdot r\,d\varphi\,dr - \tfrac{1}{2}\omega^2\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\varrho\cdot h\cdot r\,d\varphi\,dr = \text{Extremum}. \tag{1,3}$$

Hierin sind die Spannungen und Dehnungen nach (1, 1) und (1,2) noch durch $y$ auszudrücken, so daß, nach Integration über $\varphi$, das Variationsproblem A entsteht:

$$\int_0^R G(y', y, r)\,dr = \text{Extremum}, \tag{1,4}$$

mit

$$G = \frac{1}{2}Dr\left(y'^2 + \frac{2\nu}{r}y'y + \frac{1}{r^2}y^2\right) - \frac{1}{2}\omega^2\varrho h r y^2 \tag{1,5}$$

($R$ Halbmesser der Scheibe; $D = \frac{Eh}{1-\nu^2}$; ein Strich bedeutet Ableitung nach $r$).

Der Rand unserer Scheibe sei frei, d.h. $\sigma_r = 0$ in $r = R$. $y(r)$ hat demnach folgenden Randbedingungen zu genügen:

$$r = 0: \qquad y = 0 \tag{1,6}$$

$$r = R: \qquad y' + \frac{\nu}{r}\cdot y = 0. \tag{1,7}$$

Die im Variationsproblem A (1,4) zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen

$y(r)$ brauchen bekanntlich nur der geometrischen Bedingung (1,6) zu genügen. (1,7) wird vom Variationsproblem A als natürliche („dynamische") Randbedingung geliefert.

Die Eulersche Gleichung unseres Variationsproblems lautet:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)-\frac{\partial G}{\partial y}\equiv L(y)+\omega^2 \varrho h r y=0 \tag{1,8}$$

mit

$$L(y)\equiv(Dry')'+\left(\nu D'-\frac{D}{r}\right)y. \tag{1,9}$$

(1, 8) ist die Differentialgleichung 2. Ordnung für die möglichen Eigenschwingungsformen $y_i(r)$, die zu den abzählbar unendlich vielen Eigenwerten $\omega_i^2$ gehören.

Im Falle konstanter Plattendicke $h$ lautet (1,8)

$$y''+\frac{y'}{r}+\left(\lambda^2-\frac{1}{r^2}\right)y=0 \tag{1,10}$$

mit

$$\lambda^2=\frac{\omega^2\varrho(1-\nu^2)}{E}. \tag{1,11}$$

Die Lösung, welche die Randbedingung $y(0)=0$ befriedigt, ist die Besselsche Funktion 1. Ordnung

$$y=J_1(\lambda r). \tag{1,12}$$

Aus der Bedingung (1,7) für den freien Rand, der wir (1,12) zu unterwerfen haben, folgt mit $\lambda R=\xi$ eine transzendente Gleichung, die auch noch die Besselsche Funktion nullter Ordnung enthält:

$$\xi J_0(\xi)-(1-\nu)J_1(\xi)=0. \tag{1,13}$$

Die Nullstellen $\xi_i=\lambda_i R$ dieser Gleichung geben nach (1,11) die Eigenschwingungszahlen $\omega_i^2$. Für eine Querkontraktionsziffer $\nu=0{,}3$ entnimmt man den Tabellen der Besselschen Funktionen ein der niedrigsten Eigenfrequenz $\omega_1$ entsprechendes $\xi_1=2{,}0487$.

Nun wird nicht zu jeder Profilform $h(r)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1,8) existieren, die bereits tabuliert vorliegt. Andererseits ist $h(r)$ in praktischen Fällen oft nur numerisch oder graphisch gegeben. Man wird sich deshalb nach Verfahren umsehen müssen, die auch bei solchen Voraussetzungen brauchbare Näherungen für die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen liefern.

Da ist zunächst das altbekannte Verfahren von Ritz. Man geht auf das Variationsproblem A (1, 4) zurück und versucht, dieses näherungsweise zu lösen. Für $y(r)$ macht man den Ritzschen Ansatz

$$y(r)=\sum_{i=1}^{n}a_i u_i(r) \tag{1,14}$$

mit den plausibel geschätzten Koordinatenfunktionen $u_i(r)$, die mindestens den geometrischen Randbedingungen genügen müssen, und den $n$ Freiwerten $a_i$, die durch die Extremumsforderung (1,4) festgelegt werden. Die Null gesetzte Determinante des so entstehenden homogenen und linearen Gleichungssystemes für die $a_i$ ist eine ganze rationale Funktion von $\omega^2$. Ihre $n$ Nullstellen geben Näherungswerte (obere Grenzen) für die ersten $n$ Eigenfrequenzen. Je mehr Koordinatenfunktionen man nimmt, um so bessere Näherungen wird man z. B. für die beiden ersten Eigenfrequenzen erhalten. Bei vorgegebenem $n$ dagegen hängt die Güte der Näherungen von der Wahl der Koordinatenfunktionen ab. Für die numerische Rechnung beim Ritzschen Verfahren ist immer zu erstreben, mit möglichst wenigen, gut gewählten Koordinatenfunktionen auszukommen. Es besteht deshalb der Wunsch nach Methoden, die einer allzugroßen Willkür bei der Wahl der Koordinatenfunktionen keinen Raum mehr lassen. In den folgenden Abschnitten werden wir solche Methoden besprechen, zwei davon ausführlicher.

## 2. *Die Hamiltonsche Funktion und das kanonische Variationsproblem*

Aus dem Variationsproblem A (1,4) bilden wir nach einem Verfahren, das von der analytischen Mechanik her geläufig ist, ein neues Variationsproblem. Zunächst ersetzen wir in $G$ (1,5) die Ableitung $y'$ durch

$$p = \frac{\partial G}{\partial y'} = Dr\left(y' + \frac{\nu}{r}\, y\right). \tag{2,1}$$

Nach (1,1) und (1,2) gilt

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(y' + \frac{\nu}{r}\, y\right), \tag{2,2}$$

so daß

$$p = h \cdot r \cdot \sigma_r \tag{2,3}$$

im wesentlichen also die Radialspannung ist.

Nun führen wir durch die Legendresche Transformation die Hamiltonsche Funktion

$$H(p, y) = p \cdot y' - G(y', y, r) \tag{2,4}$$

ein. Auf der rechten Seite dieser Gleichung hat man sich $y'$ nach (2, 1) durch $p$ ersetzt zu denken. Eine kleine Zwischenrechnung ergibt

$$H(p, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{D \cdot r} - \frac{2\nu}{r}\, p \cdot y - \frac{D(1-\nu^2)}{r}\, y^2 + \omega^2 \varrho h r y^2\right). \tag{2,5}$$

Nun wird (2,4) in (1,4) eingesetzt und man erhält das kanonische Variationsproblem

$$\int_0^R \left\{p \frac{dy}{dr} - H(p, y)\right\} dr = \text{Extremum}. \tag{2,6}$$

Jetzt dürfen $p$ und $y$ unabhängig voneinander variiert werden. Die Eulerschen Gleichungen bilden das kanonische Gleichungssystem

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p}; \qquad p' = -\frac{\partial H}{\partial y}; \tag{2,7}$$

also

$$y' + \frac{\nu}{r}\, y = \frac{p}{D \cdot r}; \qquad p' - \frac{\nu}{r}\, p = \frac{D(1-\nu^2)}{r}\, y - \omega^2 \varrho h r y. \tag{2,8}$$

Die erste dieser Gleichungen ist mit (2,1) identisch, die zweite ist im wesentlichen die Gleichgewichtsbedingung für die Spannungen an einem Volumenelement. Diese lautet nämlich:

$$(r \cdot h \cdot \sigma_r)' = h \cdot \sigma_\varphi - \omega^2 \varrho h\, r y\,. \tag{2,9}$$

(2,8) entsteht hieraus, wenn $\sigma_\varphi$ mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes durch $\sigma_r$ und $\varepsilon_\varphi = \frac{y}{r}$ ausgedrückt wird. Durch Elimination von $p$ aus den beiden Gleichungen (2,8) entsteht unsere frühere Differentialgleichung (1,8).

### 3. *Ein Variationsproblem für die Radialspannung*

Unserem kanonischen Variationsproblem (2,6) fügen wir nun als Nebenbedingung die erste der kanonischen Gleichungen (2,8) hinzu. Dadurch werden $p$ und $y$ miteinander verbunden, können also in (2,6) nicht mehr unabhängig voneinander variiert werden. Wir benutzen noch die Nebenbedingung, um den Integranden von (2,6) zu vereinfachen und erhalten dann das Variationsproblem B

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{1}{2}\int_0^R \left\{\frac{p^2}{D r} + \frac{D(1-\nu^2)}{r}\, y^2 - \omega^2 \varrho h r\, y^2\right\} dr = \text{Extremum}\\ \text{unter der Nebenbedingung} \quad y' + \frac{\nu}{r}\, y = \frac{p}{D \cdot r}\end{gathered}} \tag{3,1}$$

Würden wir nun im Integranden $p$ zufolge der Nebenbedingung durch $y'$ ersetzen, so kämen wir wieder zu unserem alten Variationsproblem A (1,4) zurück.

Wir wollen vielmehr jetzt (3,1) als Variationsproblem für $p$, also für die Radialspannung, auffassen. Dies sei so verstanden:

Durch Integration der Nebenbedingung wird

$$y(r) = \int_0^R A(r, s)\, \frac{p(s)}{s D(s)}\, ds \tag{3,2}$$

mit

$$A(r, s) = \begin{cases} \left(\frac{s}{r}\right)^\nu & \text{für} \quad s < r \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad s > r \end{cases} \tag{3,3}$$

Zur Abkürzung werde vorübergehend $\frac{D(1-\nu^2)}{r} - \omega^2 \varrho h r = f(r)$ gesetzt. Dann schreiben wir

$$\begin{aligned}\int_0^R f(r)\, y^2(r)\, dr &= \int_0^R \left\{\int_0^R A(r, s)\, \frac{p(s)}{s D(s)}\, ds \cdot f(r) \cdot \int_0^R A(r, t)\, \frac{p(t)}{t D(t)}\, dt\right\} dr \\ &= \int_0^R \int_0^R B(s, t)\, \frac{p(s)\, p(t)}{s D(s)\, t D(t)}\, ds\, dt,\end{aligned} \tag{3,4}$$

worin

$$B(s,t) = \int_0^R A(r,s)\,\frac{D(r)\,(1-\nu^2)}{r}\,A(r,t)\,dr - \omega^2 \int_0^R A(r,s)\cdot \varrho \cdot h(r)\cdot r\cdot A(r,t)\cdot dr$$

oder kurz $$B(s,t) = K_1(s,t) - \omega^2 K_2(s,t).$$

Die Kerne $K_1$, $K_2$ und $B$ sind symmetrisch in $s$ und $t$. Führt man (3,4) in (3,1) ein und variiert nach $p$, so entsteht die Integralgleichung

$$p(r) = \int_0^R [K_1(r,s) - \omega^2 K_2(r,s)]\,\frac{p(s)}{s\,D(s)}\,ds. \tag{3,5}$$

Wir bemerken noch, daß bei dieser Auffassung des Variationsproblems (3,1) die zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen $p(r)$ keinerlei Randbedingungen zu erfüllen brauchen.

Die Berechnung der Kerne $K_1$ und $K_2$, die im allgemeinen praktisch nicht möglich sein wird, läßt sich nun, wenn wir das Variationsproblem B (3,1) mit der direkten Ritzschen Methode angehen wollen, immer vermeiden. Aus dem Näherungsansatz

$$p(r) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i(r) \tag{3,6}$$

folgt durch Quadratur der Nebenbedingung

$$y(r) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(r). \tag{3,7}$$

Sind die Koordinatenfunktionen $\pi_i$ einigermaßen glücklich gewählt worden, so werden die $u_i$ schon sehr brauchbare Koordinatenfunktionen sein. Jedenfalls erfüllen sie die geometrische Randbedingung. Genügen die $\pi_i$ überdies der dynamischen Randbedingung $\pi_i(R) = 0$, so erfüllen die $u_i$ beide, also sämtliche Randbedingungen.

(3,6) und (3,7) werden nun in (3,1) eingesetzt, und das Integral wird hinsichtlich der Freiwerte $a_i$ zum Extremum gemacht. Der weitere Rechnungsgang entspricht dem beim üblichen Ritzschen Verfahren.

## 4. *Berechnung einer Näherung für die niedrigste Eigenschwingungszahl der Scheibe konstanter Dicke*

Die Genauigkeit unseres Verfahrens prüfen wir für den Sonderfall einer einzigen Koordinatenfunktion. Näherungsweise setzen wir

$$p(r) = h\cdot r\cdot \sigma_r = a_1\cdot D\cdot r(R^m - r^m). \tag{4,1}$$

Die dynamische Randbedingung ist erfüllt. Über den Parameter $m$ werden wir noch verfügen.

Die Quadratur der Nebenbedingung ergibt

$$y(r) = a_1\cdot r\left(\frac{R^m}{1+\nu} - \frac{r^m}{1+\nu+m}\right). \tag{4,2}$$

Aus (3,1) berechnet sich der Näherungswert $\overline{\omega}_1$ für die niedrigste Eigenfrequenz $\omega_1$ zu

$$\overline{\omega}_1^2 = \frac{\int\limits_0^R \left[\frac{p^2}{D\cdot r} + \frac{D(1-\nu^2)}{r} y^2\right] dr}{\int\limits_0^R \varrho \cdot h \cdot r \cdot y^2\, dr}. \tag{4,3}$$

(4,1) und (4,2) sind in (4,3) einzusetzen. Um einen Vergleich zwischen $\omega_1$ und $\overline{\omega}_1$ zu ermöglichen, betrachten wir den in Abschnitt 1 exakt behandelten Fall $h = \text{const.}$ Nach Ausführung der Quadraturen in Zähler und Nenner von (4,3) erhalten wir

$$\xi_B^2 = \frac{\overline{\omega}_1^2 R^2 \varrho (1-\nu^2)}{E} \tag{4,4}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $m$. Das Ergebnis der numerischen Auswertung ist in den beiden ersten Spalten der folgenden Tabelle zusammengestellt.

| $m$ | $\xi_B$ | $\xi_C$ |
|---|---|---|
| 0,5 | 2,0765 | 2,3809 |
| 1,0 | 2,0595 | 2,1012 |
| 1,5 | 2,0491 | 2,0525 |
| 2,0 | 2,0511 | 2,0674 |
| 2,5 | 2,0567 | 2,1072 |
| 3,0 | 2,0634 | 2,1586 |
| $\infty$ | 2,2804 | |

Einem bekannten Satz aus der Theorie der Integralgleichungen läßt sich entnehmen, daß diese Näherungswerte $\xi_B$ immer obere Schranken für $\xi_1$ sind. Als beste Näherung haben wir demnach das Minimum von $\xi_B$ bezüglich $m$ anzusehen, das zwischen $m = 1{,}5$ und $2{,}0$ liegt. Es stimmt in allen vier Dezimalen mit dem exakten Wert $\xi_1 = 2{,}0487$ überein.

### 5. *Die Formulierung des Grammelschen Verfahrens durch ein Variationsproblem*

Um das Grammelsche Verfahren in unsere Betrachtungsweise einordnen zu können, benötigen wir eine gewisse Erweiterung des kanonischen Variationsproblems (2,6). Wir schreiben:

$$\int\limits_0^R \Big\{ y_2 p_2' + \frac{1}{2}\left[\frac{p_2^2}{D\cdot r} - 2\,\frac{\nu}{r}\, p_2 \cdot y_2 - \frac{D(1-\nu^2)}{r}\, y_2^2\right] + \frac{1}{2}\,\omega^2 \varrho h r y_1^2 + p_1 (y_2 - y_1)\Big\}\, dr = \text{Extremum}. \tag{5,1}$$

Setzen wir im Integranden $y_1 = y_2$ und $p_2 = p$, $y_2 = y$, so haben wir wieder, bis auf die Umwälzung im ersten Gliede, die aber wegen der beiden Randbedingungen erlaubt ist, unser kanonisches Variationsproblem (2,6). In (5,1) spielt $p_1$ die Rolle eines Lagrangeschen Faktors, mit dem die Nebenbedingung $y_2 = y_1$ multipliziert wird, so daß in (5,1) $y_1$, $y_2$, $p_1$ und $p_2$ unabhängig voneinander variiert werden dürfen. Die diesen vier Variationen entsprechenden Eulerschen Gleichungen — jetzt nicht mehr in kanonischer Gestalt — lauten:

$$y_2 = y_1; \qquad y_2' + \frac{\nu}{r} y_2 = \frac{p_2}{D \cdot r} \tag{5,2}$$

$$p_1 = \omega^2 \varrho h r y_1; \qquad p_2' - \frac{\nu}{r} p_2 = -p_1 + \frac{D(1-\nu^2)}{r} \cdot y_2. \tag{5,3}$$

Offenbar besagen sie dasselbe, wie die kanonischen Gleichungen (2,8). Zu (5,1) nehmen wir nun (5,3) als Nebenbedingung hinzu, vereinfachen den Integranden von (5,1) mit Hilfe der Nebenbedingung (5,3) und eliminieren in (5,3) $p_1$. Es entsteht dann das Variationsproblem

$$\frac{1}{2} \int_0^R \left\{ \frac{p_2^2}{D \cdot r} + \frac{D(1-\nu^2)}{r} y_2^2 - \omega^2 \varrho h r \cdot y_1^2 \right\} dr = \text{Extrem}. \tag{5,4}$$

mit der Nebenbedingung

$$p_2' - \frac{\nu}{r} p_2 = \frac{D(1-\nu^2)}{r} y_2 - \omega^2 \varrho h r y_1 \tag{5,5}$$

zwischen $p_2$, $y_2$ und $y_1$.

Durch Integration von (5,5) läßt sich $p_2$ berechnen und dann in (5,4) einsetzen. So entsteht ein Variationsproblem für $y_1$ und $y_2$, das schließlich auf ein System von zwei Integralgleichungen führt. Dieser Weg soll hier nicht beschritten werden.

Wir benutzen vielmehr die Nebenbedingung (5,5), um $y_1$ zu eliminieren. Es ist

$$\omega^2 \varrho y_1 = -\frac{1}{r \cdot h} \left[ p_2' - \frac{\nu}{r} p_2 - \frac{D(1-\nu^2)}{r} y_2 \right], \tag{5,6}$$

und aus (5,4) entsteht nun das Variationsproblem

$$\frac{1}{2} \int_0^R \left\{ \frac{p_2^2}{D \cdot r} + \frac{D(1-\nu^2)}{r} y_2^2 - \frac{1}{\omega^2 \varrho h r} \left[ p_2' - \frac{\nu}{r} p_2 - \frac{D(1-\nu^2)}{r} y_2 \right]^2 \right\} dr = \text{Extrem}. \tag{5,7}$$

für $p_2$ und $y_2$ ohne Nebenbedingung. Die beiden Eulerschen Gleichungen, die wir nicht benötigen, sind dem System (5,2) und (5,3) gleichwertig. Hier wie in (5,1) müssen die zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen $p_2(r)$ mindestens der dynamischen Randbedingung genügen.

Die Formulierung des Grammelschen Verfahrens durch ein Variationsproblem erfolgt, wenn wir (5,7) die zweite Gleichung (5,2) als Nebenbedingung zuordnen. Dieses Variationsproblem C lautet:

$$\frac{1}{2} \int_0^R \left\{ \frac{p_2^2}{D \cdot r} + \frac{D(1-\nu^2)}{r} y_2^2 - \frac{1}{\varrho \cdot \omega^2 \cdot h \cdot r} \left[ p_2' - \frac{\nu}{r} p_2 - \frac{D(1-\nu^2)}{r} y_2 \right]^2 \right\} dr = \text{Extrem}. \tag{5,8}$$

$$\text{mit der Nebenbedingung} \quad y_2' + \frac{\nu}{r} y_2 = \frac{p_2}{D \cdot r}. \tag{5,9}$$

Da (5,3) und (5,9) erfüllt sein sollen, erstrebt dieses Variationsproblem die Gleichung $y_2 = y_1$.

Wir fassen zunächst, mit dem Grammelschen Verfahren konform gehend, (5,8) als Variationsproblem für $p_2$, also für die Radialspannung, auf. Im Gegensatz zu unserem Variationsproblem B (3,1) muß jetzt $p_2$ der dynamischen Randbedingung genügen. Die Näherungslösung von (5,8) mit der direkten Ritzschen Methode erfolgt genau wie bei (3,1).

## 6. *Die Grammelsche Näherung und ihre Genauigkeit*

Zur Prüfung der Genauigkeit benutzen wir wieder den von Grammel angegebenen Ansatz (4,1) für eine Koordinatenfunktion. Durch Integration der Nebenbedingung (5,9) gewinnt man aus diesem $p_2$ ein $y_2$ derselben Gestalt wie (4,2). Nun ist die eckige Klammer in (5,8) zu berechnen. Nach (5,6) hat man damit auch

$$\omega^2 \varrho y_1 = -a_1 \frac{D'}{D} (R^m - r^m) + a_1 \frac{m(m+2)}{1+\nu+m} r^{m-1}, \tag{6,1}$$

allerdings muß dabei das geschätzte $p_2$ (4,1) differenziert werden. Nach den noch notwendigen Quadraturen in (5,8) bekommen wir schließlich eine Näherung $\overline{\omega}_1$ für die niedrigste Eigenfrequenz $\omega_1$ in der Gleichung

$$\xi_C^2 = \frac{\overline{\omega}_1^2 R^2 \cdot \varrho (1-\nu^2)}{E} = \frac{(1+\nu)(m+1)(m+2)^2}{m(2m+3+\nu)}, \tag{6,2}$$

die in der Tabelle des 4. Abschnitts ausgewertet ist.

Auch das Ergebnis dieser Näherungsrechnung ist sehr gut und für praktische Zwecke mehr als befriedigend. Jedoch zeigt die Tabelle, daß für gleiches $m$ $\xi_B < \xi_C$ ist. Die Näherungsrechnung nach Variationsproblem B (3,1) liefert also noch genauere Werte. Sehen wir von diesem praktisch belanglosen Umstand ab, so möchten wir doch das Näherungsverfahren nach Abschnitt 3 und 4 dem Grammelschen Verfahren vorziehen, weil im ganzen die Rechnung einfacher und eine Differentiation nicht erforderlich ist.

Das Variationsproblem C (5,8) läßt sich noch so umformen, daß der Zusammenhang mit der quellenmäßigen Darstellung von $y_2$ — dem Grammelschen Ausgangspunkt — offensichtlich wird. Hierzu sei (5,8) als Variationsproblem für $y_2$ aufgefaßt; im Integranden wird zufolge der Nebenbedingung $p_2$ durch $y_2$ ersetzt. Unter Benutzung des Differentialoperators $L$ in (1,9) und bei Beachtung der Nebenbedingung ist

$$L(y_2) \equiv p_2' - \frac{\nu}{r} p_2 - \frac{D(1-\nu^2)}{r} y_2, \tag{6,3}$$

ferner

$$\int_0^R [-y_2 L(y_2)]\, dr = \int_0^R \left[\frac{p_2^2}{D \cdot r} + \frac{D(1-\nu^2)}{r} y_2^2\right] dr + [p_2 y_2]_0^R, \tag{6,4}$$

wobei das letzte Glied wegen der Randbedingungen fortfällt. Es entsteht das Variationsproblem

$$\int_0^R \left\{-y_2 L(y_2) - \frac{1}{\omega^2 \varrho h r} L^2(y_2)\right\} dr = \text{Extrem.}, \tag{6,5}$$

und nach (6,3) und (5,6) kann man schreiben:

$$L(y_2) = -\omega^2 \varrho h r y_1. \tag{6,6}$$

In (6,5) muß $y_2$ sämtlichen Randbedingungen genügen. Erstrebt wird $y_2 = y_1$. Ersetzt man im Integranden $y_2$ durch $y_1$ nach (6,6), so hat man das Variationsproblem der quellenmäßigen Darstellung. Da die Integration von (6,6) die Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung erfordert (Greensche Funktion), umgeht Grammel diese Schwierigkeit durch seine Methode, die in unserer Darstellung auf das Variationsproblem C (5,8) hinausläuft*).

Aus dem Variationsproblem B (3,1) gewinnen wir durch dieselben Betrachtungen wie oben

$$\int_0^R \{-y_2 L(y_2) - \omega^2 \varrho h r y_2\}\, dr = \text{Extrem}. \tag{6,7}$$

Auch hier hat $y_2$ sämtliche Randbedingungen zu erfüllen.

Da nun zufolge der Schwarzschen Ungleichung

$$\frac{\int_0^R -y\, L(y)\, dr}{\int_0^R \varrho h r y^2\, dr} \leqq \frac{\int_0^R \frac{1}{\varrho h r} L^2(y)\, dr}{\int_0^R -y\, L(y)\, dr} \tag{6,8}$$

ist, können wir die allgemeingültige Aussage machen, daß bei gleichen Koordinatenfunktionen das Variationsproblem B kleinere und darum bessere Näherungswerte für die Eigenfrequenzen liefert als das Variationsproblem C [7]), eine Aussage, die unsere numerischen Berechnungen in der Tabelle des 4. Abschnittes bestätigt.

## III. Zusammenfassung

Am Beispiel der Dehnungsschwingungen einer Kreisscheibe werden Näherungsverfahren für die Berechnung der Eigenfrequenzen entwickelt. Im Mittelpunkt der Betrachtungen, in die sich auch das Grammelsche Verfahren einordnet, steht das kanonische Variationsproblem. Zwei Näherungsverfahren werden numerisch erprobt und hinsichtlich ihrer Güte miteinander verglichen.

## Literatur


1) Biezeno-Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1939.

2) Collatz, L., Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig 1945.

7) Grammel, R., Über die Lösung technischer Eigenwertprobleme. Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues, Heft 6, Berlin 1943.

4) Günther, W., Die Biegung kreissymmetrischer Ringplatten veränderlicher Dicke als Problem der Variationsrechnung. Dissertation Braunschweig 1946.

5) Münz, H., Ein Integrationsverfahren für die Berechnung der Biegespannungen achsensymmetrischer Schalen unter achsensymmetrischer Belastung. Ing.-Archiv, 19. Bd. (1951).

6) Schaefer, H., Transformationen der Variationsrechnung und ihre Anwendungen auf technische Eigenwertprobleme. ZAMM, Bd. 29 (1949), S. 25.

7) Collatz, L., Genäherte Berechnung von Eigenwerten. ZAMM, Bd. 19 (1939), S. 236.


*) Bei einläufigen Systemen kann das Grammelsche Verfahren diese Schwierigkeit sehr viel einfacher umgehen. Eine Differentation ist nicht erforderlich und die Genauigkeit des Verfahrens folglich größer.